017769

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/ இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1999 අගෝස්තු கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1999 ஓகஸ்ற் General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1999
ව්‍යවහාරික ගණිතය I பிரயோக கணிதம் I Applied Mathematics I — 06 S I
පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. S_1 නැවතුම්පොළක සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් අරඹන දුම්රියක වේගය, ශුන්‍යයේ සිට u උපරිම අගයක් දක්වා, නියත α ත්වරණයකින් වැඩි වෙයි. මෙම උපරිම වේගය t_1 කාල ප්‍රාන්තරයක් තුළ පවත්වාගෙන ගියායින් පසුව, රෝධක යෙදීමෙන් විචල්‍ය මන්දනයක් දුම්රියට ලැබේ. මෙම මන්දනය ශුන්‍යයේ සිට β දක්වා ඒකාකාරී ලෙස t_2 කාලයක් තුළ වැඩි වන අතර දුම්රිය ඊළඟ S_2 නැවතුම්පොළෙහි දී නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. එකිනෙකට d දුරකින් පිහිටි S_1 සහ S_2 නැවතුම්පොළ අතර ගමන සම්පූර්ණ කිරීමට දුම්රිය ගන්නා මුළු කාලය T වෙයි.

ත්වරණ-කාල වක්‍රයේ සහ ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ රූප සටහන්, දෙකම කොටස් නම් කරමින් අඳින්න. ඒ නයින් පහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න :

(i) $u = \frac{\beta}{2} t_2$;

(ii) මන්දනය ආරම්භයේ සිට මැන්න t කාලයේ දී දුම්රියේ වේගය, $v = u - \frac{\beta t^2}{2t_2}$ වේ. මෙහි $0 \le t \le t_2$;

(iii) $d = u\left[\frac{2}{3} + \frac{\beta}{4\alpha}\right] t_2 + ut_1$;

(iv) $T = \frac{d}{u} + 2u\left(\frac{1}{3\beta} + \frac{1}{4\alpha}\right)$.

2. (අ) Oxy-තලයෙහි චලනය වන අංශුවක $\mathbf{r}$ පිහිටුම් දෛශිකය, t කාලයේ දී

$\mathbf{r} = (8 + 20t)\,\mathbf{i} + (90 + 10t - 5t^2)\,\mathbf{j}$ මගින් දෙනු ලැබේ. මෙහි $\mathbf{i}$ සහ $\mathbf{j}$ යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{Ox}$ සහ $\overrightarrow{Oy}$ අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික වේ. $t = T$ වන විට අංශුව, එහි ආරම්භක චලිත දිශාවට සෘජුකෝණීව චලනය වේ. T හි අගය සහ මෙම මොහොතේ දී අංශුවෙහි පිහිටීමට ආරම්භක පිහිටීමේ සිට දුර සොයන්න.

t කාලයේ දී, අංශුවේ ත්වරණයත් සොයන්න.

(ආ) මෝටර් සයිකලයක් සෘජු සමතලා පාරක එක් දරයකට සමාන්තරව V නියත ප්‍රවේගයකින් චලනය වන අතර එම දරයේ සිට නියත a දුරක් පවත්වා ගනී. එම දරයේ සිටි ළමයෙක්, මෝටර් සයිකලයට b දුරක් ඉදිරියෙන් පාරට පියවර තබා, පාරට θ කෝණයකින් වූ U නියත ප්‍රවේගයකින් පාරෙන් අනික් පැත්තට ඇවිදගෙන යයි; මෙහි $U < V$ වේ. මෝටර් සයිකලයට සාපේක්ෂව ළමයාගේ පෙත සොයා

$$U > \frac{Va}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

වෙයි නම්, මෝටර් සයිකලයට ඉදිරියෙන් අනතුරක් නැතිව ළමයාට පාරෙන් මාරුවී යා හැකි බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. O මූලයේ සිට $\mathbf{u}$ ආරම්භක ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබූ අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ, නිදහසේ චලනය වෙයි. t කාලයකට පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය $\mathbf{v}$ ද පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{r}$ ද නම් සහ (සිරස් ව පහළට වූ) ගුරුත්වජ ත්වරණය $\mathbf{g}$ ද නම්

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 = \mathbf{v}t - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$

බව පෙන්වා, මෙම සමීකරණ දෛශික රූප සටහනක නිරූපණය කරන්න.

O ලක්ෂ්‍යය, උඩු සිරසට 2β සුළු කෝණයකින් ආනත වූ දෘඪ තලයක් මත පිහිටන බව සහ $\mathbf{u}$ ප්‍රවේග දෛශිකය මගින් තලය සහ සිරස අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කෙරෙන බවත් එහි විශාලත්වය $w\cos\beta$ බවත් දී ඇත්නම්, අඳින ලද දෛශික රූප සටහන යොදා ගනිමින්, හෝ අන් අයුරකින් හෝ, පහත දක්වෙන ප්‍රතිඵල පිහිටුවන්න:

(i) අංශුවේ පියාසර කාලය $\frac{w}{g}$ වෙයි.

(ii) තලය මත පරාසය $\frac{w^2}{2g}$ වෙයි.

(iii) අංශුව තලය සමග ගැටීමට මොහොතකට පෙර එහි ප්‍රවේගය, ආරම්භක චලිත දිශාවට ලම්බ වන අතර $w\sin\beta$ විශාලත්වයෙන් යුතු වෙයි.

4. රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති මූලධර්මය සහ යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය ප්‍රකාශ කරන්න.

ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, ස්කන්ධය M සහ ආනතිය α වූ සුමට කුඤ්ඤයක ආනත තලය දිගේ පහළට සර්පණය වන අතර කුඤ්ඤයට සුමට තිරස් මේසයක් මත චලනය වීමට නිදහස ඇත; ආරම්භයේ දී පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ පවතී. කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ v වේගය,

$$v^2 = \frac{2(M+m)g\,x\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වීමට ඉහත සංස්ථිති නියම යොදන්න; මෙහි x යනු කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුව චලනය වී ඇති දුර යි.

ඒ නයින්, හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය සොයා, ආරම්භක නිශ්චල පිහිටීමේ සිට කුඤ්ඤය ගමන් කර ඇති දුර

$$\frac{m x \cos\alpha}{M + m}$$ බව පෙන්වන්න.

5. මුළු ස්කන්ධය M වූ දුම්රියක්, එන්ජිමක් මගින් R ප්‍රතිරෝධයක ට එරෙහි ව සෘජු සමතල දුම්රිය මාර්ගයක් දිගේ ඇදගෙන යනු ලබයි. එන්ජිම කාර්ය කරන ශීඝ්‍රතාව H නියතයක් වෙයි.

(i) R නියතයක් වූ විට, නිශ්චලතාවයෙන් පටන් ගෙන U වේගයකට ළඟා වීමට දුම්රිය ගන්නා කාලය

$$\frac{MH}{R^2}\ln\left(\frac{H}{H - RU}\right) - \frac{MU}{R}$$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $U < \frac{H}{R}$ වෙයි.

(ii) $R = Mkv$ (මෙහි k යනු නියතයක් ද v යනු දුම්රියේ වේගය ද වේ) වූ විට නිශ්චලතාවයෙන් පටන් ගෙන V වේගයකට ළඟාවීමට දුම්රිය ගන්නා කාලය

$$\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{H}{H - MkV^2}\right)$$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $V < \sqrt{\frac{H}{Mk}}$ වෙයි.

$v = V$ වන විට එන්ජිමේ ජවය කපා හැරියේ නම්, (මෙම පිහිටීමේ සිට මැන්න විට) අවසාන නිශ්චලතා පිහිටීමට පැමිණීමට පෙර දුම්රිය ගමන් කරන දුර සොයන්න.

6. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, ස්වභාවික දිග l සහ මාපාංකය $2mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ අනික් කෙළවර O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව සිරස් ව තිබිය දී අංශුව, එහි සමතුලිත පිහිටීමෙන් d දුරක් පහළට ඇද, නිශ්චලතාවයේ සිට මුද හරිනු ලැබේ.

P අංශුවේ සමතුලිත පිහිටීමේ සිට පහළට සිරස් විස්ථාපනය, t කාලයේ දී x වෙයි නම්,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l}x = 0$$

බව පෙන්වන්න.

(i) $d < \frac{l}{2}$ වෙයි නම්, අංශුව එහි සමතුලිත පිහිටීම වටා $\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$ කාලාවර්තය සහිත ව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බවත්, තන්තුව නොබුරුල්ව තිබෙන බවත් පෙන්වන්න.

(ii) $d > \frac{l}{2}$ වෙයි නම්

$$\sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\pi - \sin^{-1}\left(\frac{l}{2d}\right)\right]$$

කාලයකට පසු තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.

7. AB ඉණිමඟක්, එහි එක් A කෙළවරක් රළු තිරස් ගෙබිමක සහ B අනෙක් කෙළවර රළු සිරස් බිත්තියක ස්පර්ශ වී නිශ්චලතාවයේ ඇත. AB ඉණිමඟ අඩංගු සිරස් තලය බිත්තියට ලම්බ වෙයි. A සහ B එක් එක් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වන අතර ඉණිමඟෙහි G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මගින් $AG : GB = k : 1$ අනුපාතයට AB බෙදෙයි. ඉණිමඟ සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ තිබෙන විට එය තිරසට තිබිය යුතු θ ආනතිය

$$\tan\theta = \frac{k - \mu^2}{\mu(k+1)}$$

මගින් දෙන බව පෙන්වන්න.

ඉණිමඟ ඒකාකාරී වන විට, $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\lambda$ බව අපෝහනය කරන්න; මෙහි λ යනු ඝර්ෂණ කෝණය වන අතර 2λ සුළු කෝණයක් බව දී ඇත.

ඉණිමඟෙහි තිරසට ආනතිය $\alpha\left(< \frac{\pi}{2} - 2\lambda\right)$ වෙයි නම්, ඉණිමඟ පහළට ලිස්සා යෑම යන්තම් වැළකෙන පරිදි එය අඩංගු සිරස් තලයෙහි යෙදිය යුතු යුග්මයේ G ඝූර්ණය,

$G = Wa\cos(\alpha + 2\lambda)$ බව පෙන්වන්න, මෙහි W යනු ඉණිමඟේ බර ද $2a$ යනු ඉණිමඟේ දිග ද වෙයි.

8. ඒකාකාර අර්ධවෘත්තාකාර ආස්තරයක අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වේ. එහි සෘජු දරය AOB වන අතර සමමිතික අක්ෂය OC වෙයි. පිළිවෙළින් OB සහ OC දිගේ Ox සහ Oy සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය අක්ෂ ගනු ලැබේ. මෙම අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන් ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි ඛණ්ඩාංක $\left(0, \frac{4a}{3\pi}\right)$ බව, අනුකලනය මගින්, පෙන්වන්න.

ආස්තරය මත අරය $r(<a)$ වූ අර්ධ වෘත්තයක් අඳිනු ලැබේ; එම අර්ධ වෘත්තයේ P කේන්ද්‍රය පිහිටන්නේ AO මත A සිට r දුරකින් ය. මෙම අර්ධ වෘත්තයෙන් ඇතුළත වර්ගඵලය සහිත කොටස කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. ඉහත Oxy-අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන් ම, ආස්තරයෙන් ඉතිරි වන R කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි $(\bar{x}, \bar{y})$ ඛණ්ඩාංක දෙනු ලබන්නේ

$$\bar{x} = \frac{r^2}{a+r}, \quad \bar{y} = \frac{4\left(a^2 + ar + r^2\right)}{3\pi(a+r)}$$

මගින් බව පෙන්වන්න.

මෙම R කොටස A ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇත්නම්, සමතුලිත පිහිටීමේ දී, AOB දරයෙහි සිරසට ආනතිය r කෙරෙන් ස්වායත්ත වන බව පෙන්වා, මෙම නියත ආනතිය සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

9. $ABCD$ යනු AB, BC, CD සහ DA සැහැල්ලු දඬු හතරක් නිදහස් ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් සෑදූ රොම්බසයක ආකාරයේ රාමු සැකිල්ලකි. රොම්බසයේ B සහ D ශීර්ෂ තවත් සැහැල්ලු දණ්ඩකින් සම්බන්ධ කර ඇත්තේ $B\hat{A}D$ කෝණය $2\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ වන පරිදි ය. රාමු සැකිල්ල, සිරස් තලයක නිශ්චලතාවයේ ඇත්තේ, B සුමට ආධාරකයක් මත තබා, AB සිරස් ව CD මට්ටමට පහළින් තිබෙන පරිදි A හි දී සිරස් බලයකින් නැංගුරම් කර (anchored) සහ C හි දී W භාරයක් දරමිනි.

A හි දී යොදන බලය සහ B හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

"බෝ අංකනය" භාවිතයෙන් රාමුසැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින්, දඬු පහේ ම ප්‍රත්‍යා බල, ආතති සහ තෙරපුම් වෙන් කර දක්වමින්, W සහ α ඇසුරෙන් සොයන්න.

10. $P(A_i \mid D)$ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව දෙන්නා වූ බේස් ප්‍රමේයයේ සරල ආකාරය ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $i = 1, 2, 3$ සඳහා A_i යනු එක්තරා පරීක්ෂණයක S නියැදි අවකාශය මේලය වශයෙන් ඇති අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි තුනක් බවත් D යනු $P(D) > 0$ වන සේ ඇති S හි අභිමත සිද්ධියක් බවත් දී ඇත. [සාධනය අපේක්ෂා නොකෙරේ].

කර්මාන්තශාලාවක් මගින් A_1, A_2, A_3 යන්ත්‍ර තුනක් යොදා ගනිමින් සමාන භාණ්ඩ නිෂ්පාදනය කරනු ලැබේ. එම යන්ත්‍ර තුනෙන් දිනකට නිපදවන ඒකක ගණන පිළිවෙළින් 200, 175 සහ 125 වේ. දීර්ඝ කාලයක් තුළ සොයා ගෙන ඇති පරිදි නිෂ්පාදනයෙහි දෝෂ සහිත ප්‍රතිශතය A_1, A_2 සහ A_3 යන්ත්‍ර සඳහා පිළිවෙළින් 4%, 4%, සහ 6% වේ.

(අ) කර්මාන්තශාලාවේ නිෂ්පාදනයෙන් ඒකකයක් සසම්භාවී ව තෝරා ගත් විට එය සදෝෂ එකක් වීමේ සම්භාවිතාව 0·045 බව පෙන්වන්න.

(ආ) කර්මාන්තශාලාවේ නිෂ්පාදනයෙන් සසම්භාවීව තෝරාගත් ඒකකයක් සදෝෂ එකක් බව සොයා ගත්තේ නම්, එය A_1 යන්ත්‍රයෙන් නිපදවා තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. එය නිපදවීමට වඩාත් ම ඉඩ ඇත්තේ කුමන යන්ත්‍රයෙන් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ඇ) වෙනස් දින තුනක දී එක් එක් දවසේ කර්මාන්ත ශාලාවේ නිෂ්පාදනයෙන් ඒකකයක් බැගින් සසම්භාවී ව තෝරා ගනු ලැබේ. ඒවායින් හරියටම එකක් සදෝෂ වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ඈ) එක්තරා දිනක දී, එක් එක් යන්ත්‍රයේ නිෂ්පාදනයෙන් එක ඒකකයක් බැගින් සසම්භාවී ව තෝරා ගනු ලැබේ නම් ඒවායින් හරියටම එකක් සදෝෂ වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.